ПЛАН УЧЕБНОГО ЗАНЯТИЯ

по дисциплине «Математика»

дата 20.11.23

Новый материал (конспект в тетрадь)

Тема: «Синус, косинус и тангенс двойного угла. Формулы половинного угла»

1. Синус двойного аргумента

Определение: Синус двойного аргумента равен удвоенному произведению синуса и косинуса данного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Пример. Вычислите:

$$\sin 2\alpha,\quad \text{если } \sin\alpha = -0{,}6;\quad 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$

Решение:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Найдем $\cos\alpha$.

Так как $180^\circ < \propto < 270^\circ$, то $\propto$- угол III четверти, т.е. $-1 < cos\alpha < 0$.

$$\cos\propto = \pm\sqrt{1-\sin^2\propto} = -\sqrt{1-(-0{,}6)^2} = -\sqrt{0{,}64} = -0{,}8$$

Итак, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot(-0{,}8) = 0{,}96$

Пример. Вычислите:

$$(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$$

Решение:

$$(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2 = \cos^2 75^\circ - 2\cos 75^\circ \sin 75^\circ + \sin^2 75^\circ = 1 - \sin 150^\circ == 1 - \sin(180^\circ - 30^\circ)$$
$$= 1 - \sin 30^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Косинус двойного аргумента

Определение: Косинус двойного аргумента равен разности квадратов косинуса и синуса данного аргумента.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Пример. Вычислите:

$$\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$$

Решение:

$$\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Пример. Вычислите:

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$$

Решение:

$$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha)^2-(\sin^2\alpha)^2$$
$$=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=1\cdot cos\alpha=cos\alpha$$

3. Тангенс двойного аргумента

$$tg2\propto=\frac{2tg\propto}{1-tg^2\propto}$$

Пример. Вычислите:

$$\frac{2tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\frac{\pi}{8}}$$

Решение:

$$\frac{2tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\frac{\pi}{8}}=tg\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=tg\frac{\pi}{4}=1$$

Пример. Вычислите:

$$\frac{6tg75^{\circ}}{1-tg^2 75^{\circ}}$$

Решение:

$$\frac{6tg75^{\circ}}{1-tg^2 75^{\circ}}=3tg(2\cdot75^{\circ})=3tg150^{\circ}=3tg(180^{\circ}-30^{\circ})=-3tg30^{\circ}=-\sqrt{3}$$

4. Формулы половинного угла

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$ формула**синуса половинного аргумента**

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha+1}{2}$$ формула**косинуса половинного угла**

Так как тангенс — это отношение синуса на косинус, тоформула**косинуса половинного угла**

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Так как котангенс — это число, взаимообратное тангенсу, то

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

5. Решение задач

Пример. Вычислите:

$$2\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{8}\cos\frac{13\pi}{8}$$

Решение:

Используем формулу синуса двойного аргумента. Затем выделим период и применим свойство периодичности:

$$2\sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{8}\cos\frac{13\pi}{8} = \sqrt{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{13\pi}{8}\cos\frac{13\pi}{8} = \sqrt{2}\sin\left(2\cdot\frac{13\pi}{8}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\frac{13\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{16\pi-3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(4\pi-\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Далее применим свойство нечётности синуса и формулу приведения:

$$\sqrt{2}\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

Пример. Вычислите:

$$\sqrt{32}\,cos^2\frac{3\pi}{8} - \sqrt{32}\,sin^2\frac{3\pi}{8}$$

Решение:

Вынесем за скобку общий множитель и применим формулу косинуса двойного аргумента:

$$\sqrt{32}\,cos^2\frac{3\pi}{8} - \sqrt{32}\,sin^2\frac{3\pi}{8} = \sqrt{32}\left(cos^2\frac{3\pi}{8} - sin^2\frac{3\pi}{8}\right) =$$

$$= \sqrt{32}\left(cos^2\frac{3\pi}{8} - sin^2\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{32}\cos\left(2\cdot\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{32}\cos\frac{3\pi}{4}$$

Далее используем формулу приведения и вычислим:

$$\sqrt{32}\cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{32}\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right) = \sqrt{32}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\sqrt{32}\cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{32}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{64}}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

Пример.Найдите значение выражения

$$14\,sin\,135°\cdot cos\,135°$$

Решение:

Применяем формулу синуса двойного аргумента:

$$14\,sin\,135°\cdot cos\,135° = 7\cdot 2\cdot sin\,135°\cdot cos\,135° =$$

$$7\cdot sin(2\cdot 135°) = 7\cdot sin\,270° = 7\cdot sin(360° - 90°) =$$

$$= 7\,sin(-90°) = 7(-1) = -7$$

Пример. Вычислите:

$$\sqrt{8} - \sqrt{32}\,sin^2\frac{11\pi}{8}$$

Решение:

Выделим общий множитель и вынесем его за скобку, затем применим формулу косинуса двойного аргумента:

$$\sqrt{8}-\sqrt{32}\,sin^2\frac{11\pi}{8}=\sqrt{8}\left(1-\sqrt{4}\,sin^2\frac{11\pi}{8}\right)=\sqrt{8}\left(1-2\,sin^2\frac{11\pi}{8}\right)=$$

$$=\sqrt{8}\cos\left(2\cdot\frac{11\pi}{8}\right)=\sqrt{8}\cos\frac{11\pi}{4}$$

Далее выделим период и применим формулу приведения:

$$\sqrt{8}\cos\left(\frac{12\pi-\pi}{4}\right)=\sqrt{8}\cos\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{8}\cos\left(2\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{8}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{8}\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{16}}{2}=-2$$

Пример.Известно, что $\cos\alpha=0{,}4,\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\,\pi$. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$; $\cos\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}$ найдём по формуле: $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-0{,}4}{2}=0{,}3$; $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{0{,}3}$.

По условию $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\,\pi$. Разделив обе части неравенства на 2, получаем $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\,\pi$,

значит угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, здесь синус положительный $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{0{,}3}$.

2) $\cos\frac{\alpha}{2}$; найдём по формуле $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha+1}{2}=\frac{0{,}4+1}{2}=0{,}75$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{0{,}75}=\pm0{,}5\sqrt{3}$$

Мы уже выяснили, что угол $\frac{\alpha}{2}$ во второй четверти, косинус отрицательный. $\cos\frac{\alpha}{2}=-0{,}5\sqrt{3}.$

3) Так как тангенс — это отношение синуса на косинус, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{0{,}3}}{-0{,}5\sqrt{3}}=-2\sqrt{0{,}1}.$

Конспект отправляем на электронную почту oles.udalova@yandex.ru